

宇田雄一「古典物理学」

$\forall j \in \{4, 5\}; \forall n \in \mathbb{N}; \forall f \in F_{4, n}; \forall m \in \mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\});$

$$e'_{\square}(f, m) \Leftrightarrow [\exists g \in F_{4, n}(\mathbb{R}); [1] \text{ and } [2]]$$

$$[1] \quad \forall a > 0; e_{\square}(g(a), m; a)$$

$$[2] \quad \lim_{a \rightarrow +0} g(a) = f$$

ここまで手続きを正則化(regularization)と呼ぶ。デルタ関数を $\Delta(a)$ に取り替える以外にも、色々と異なる正則化の方法が考えられる。さて、 $e'_{\square}(f, m)$ も $e'_{\square}(m)$ も、 $m \in \mathbb{R}(2 \times 1)$ のときには $F_{4, 1}$ の中に解を持つ。しかし $n \geq 2$ 、 $m \in \mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\})$ の場合には解を持たない。したがって、 $e'_{\square}(f, m)$ も $e'_{\square}(m)$ も、まだ目指すもっともらしい運動方程式ではない。

そこで登場するのが繰り込み(renormalization)だ。繰り込みとは、何か適当な写像 $\omega \in [\mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\}) \times \mathbb{R}] \mapsto \mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\})$ を見つけて、 e^R_5 を以下のように定義することだ。

$\forall f \in F_{4, n}; \forall m \in \mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\});$

$$e^R_5(f, m) \Leftrightarrow [\exists g \in F_{4, n}(\mathbb{R}); [1] \text{ and } [2]]$$

$$[1] \quad \forall a > 0; e_5(g(a), \omega(m, a); a)$$

$$[2] \quad \lim_{a \rightarrow +0} g(a) = f$$

もし、 $\forall m \in \mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\}); \forall a > 0; \forall k \in \{1, \dots, n\};$

$$[\omega(m, a)](1, k) = m(1, k) - [m(2, k)]^2 / (4\pi a)$$

$$[\omega(m, a)](2, k) = m(2, k)$$

という風に ω を定めれば、 $e^R_5(f, m)$ には $n \geq 2$ の場合にも解があり、この場合には以下の定理が成り立つ。

$\forall f \in F_{4, n}; \forall m \in \mathbb{R}(2 \times \{1, \dots, n\}); [[1] \text{ and } [2]] \Rightarrow e^R_5(f, m)$

$$[1] \quad f(N_3) = \sum_{k=1}^n E^-(f(N_1, k), m(2, k))$$

$$[2] \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}; e^R_1 \left[f(N_1, k), \sum_{j \in \{1, \dots, n\} - \{k\}} E^-(f(N_1, j), m(2, j)), m(\square, k) \right]$$