の定理だ。これより、自然の任意の数学的古典理論Tに対して、$\mathscr{V}_{\mathrm{T}}$は群をなすことが分かる。$\mathscr{M}_{\text{干}}\mathrm{V}=\mathscr{M}_{\mathrm{T}}$ という式を解釈するためには、$f\in\mathscr{F}$を使って $[\mathscr{M}_{\text{干}}\mathrm{V}](f)=\mathscr{M}_{\mathrm{T}}(f)$ を$\mathscr{M}_{\text{干}}(\mathrm{V}(f))=\mathscr{M}_{\mathrm{T}}(f)$ の形に変形しておくと分かり易い。この式は、Tでfによって表されるのと同一の歴史が、干ではV(f)によって表されることを意味する。$\mathscr{L}_{\mathrm{T}}\mathrm{V}=\mathscr{L}_{\mathrm{T}}$ に対しては二通りの見方が出来る。一つは $\mathscr{L}_{\mathrm{T}}(\mathrm{V}(f))=\mathscr{L}_{\mathrm{T}}(f)$ に基づいて、$\mathscr{M}_{\mathrm{T}}(f)$が可能ならば$\mathscr{M}_{\mathrm{T}}(\mathrm{V}(f))$も可能だと結論する見方で、これを**能動的見方**と言う。もう一つは、$\mathscr{L}_{\text{干}}\mathrm{V}=\mathscr{L}_{\mathrm{T}}$ と組み合わせて $\mathscr{L}_{\text{干}}=\mathscr{L}_{\mathrm{T}}$ と結論する見方で、これを**受動的見方**と言う。どちらの見方も正しいが、受動的な見方が出来るのは、Vが$\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$から$\mathscr{F}_{\mathrm{T}}$の上への一対一写像である場合に限られる。$\mathscr{M}_{\text{干}}\mathrm{V}=\mathscr{M}_{\mathrm{T}}$ に対する上記の解釈は、受動的な見方に属する。座標変換という名称も受動的な見方を反映している。能動的見方と受動的見方の違いを一言で言うと、それは歴史を変えるか座標系を変えるかの違いだ。マッハの描像では、$\mathscr{F}$の各元をn個の数の組、$\mathscr{L}$をその数の組に対するm個の方程式と見なすのだった。これに従えば、$\mathscr{F}$としてn次元空間をイメージし、$\mathscr{L}$の解全体の集合として、この空間内の$n-m$次元図形をイメージすることが出来る。$n=3, m=1$ の場合にはこの図形は面だし、$n=3, m=2$ の場合にはこの図形は線となる。Vによるこの図形の像は、また$\mathscr{F}$内の図形となるが、$\mathscr{L}$がVの下で不変であるとは、Vによる像がもとの図形にぴったり重なることに他ならない。**対称性**という語の由来はここにある。対称性という語を物理学では、共変性や不変性を指して漠然と用いる。

$\mathscr{T}$を空でない集合とし、$\mathscr{T}$の元はすべて自然の数学的古典理論であり、$[\forall\mathrm{T}, \text{干}\in\mathscr{T};\ \mathscr{H}_{\mathrm{T}}=\mathscr{H}_{\text{干}}$ and $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}=\mathscr{F}_{\text{干}}]$ が成り立ち、($\forall\mathrm{T}\in\mathscr{T}$; $\mathscr{M}_{\mathrm{T}}$は一対一だ)とする。集合Fを ($\forall\mathrm{T}\in\mathscr{T}$; $\mathscr{F}_{\mathrm{T}}=\mathrm{F}$) によって定義しておく。また$\mathscr{V}$を集合とし、$\mathscr{V}$の元はすべてFからFの上への一対一写像だとする。このとき、以下の条件のうちの【1】【2】が成り立てば【3】【4】も成り立ち、逆に【3】【4】が成り立てば【1】【2】も成り立つ。

【1】$\forall\mathrm{T}\in\mathscr{T};\ \forall\mathrm{V}\in\mathscr{V};\ \exists\text{干}\in\mathscr{T};\ \mathscr{M}_{\text{干}}\mathrm{V}=\mathscr{M}_{\mathrm{T}}$

【2】$\forall\mathrm{T}, \text{干}\in\mathscr{T};\ \exists\mathrm{V}\in\mathscr{V};\ \mathscr{M}_{\text{干}}\mathrm{V}=\mathscr{M}_{\mathrm{T}}$

【3】$\mathscr{V}$は群をなす。