【4】 $\exists T \in \mathscr{T}$; $[\quad (\forall \bar{T} \in \mathscr{T};\ \exists V \in \mathscr{V};\ \mathscr{M}_{\bar{T}} V = \mathscr{M}_T)$
$\text{and } (\forall V \in \mathscr{V};\ \exists \bar{T} \in \mathscr{T};\ \mathscr{M}_{\bar{T}} V = \mathscr{M}_T)]$

また、$\mathscr{V}$がFからFの上への一対一写像全体の集合ならば、【1】【4】が成り立つか否かに関わらず、【2】【3】が成り立つ。下記の条件【5】は$\mathscr{T}$が、同一の内容を異なる言い方で述べた理論の集まりであることを意味する。【5】が成り立てば【6】も成り立つ。従って、$\mathscr{V}$がFからFの上への一対一写像全体の集合で、かつ【4】【5】が成り立てば、【1】【2】【3】【6】も成り立つ。もう一つの特別な場合として、【4'】【5】が成り立つ場合が考えられる。【4'】【5】が成り立てば、【1】【2】【3】【4】【6】【6'】も成り立つ。

【4'】 $\exists T \in \mathscr{T}$; $[\mathscr{V} = \mathscr{V}_T \text{ and } (\forall \bar{T} \in \mathscr{T};\ \exists V \in \mathscr{V};\ \mathscr{M}_{\bar{T}} V = \mathscr{M}_T)$
$\text{and } (\forall V \in \mathscr{V};\ \exists \bar{T} \in \mathscr{T};\ \mathscr{M}_{\bar{T}} V = \mathscr{M}_T)]$

【5】 $\forall T, \bar{T} \in \mathscr{T};\ \mathscr{L}_T (\mathscr{M}_T)^{-1} = \mathscr{L}_{\bar{T}} (\mathscr{M}_{\bar{T}})^{-1}$

【6】 $\forall T, \bar{T} \in \mathscr{T};\ \forall V \in F(F);\ \mathscr{M}_{\bar{T}} V = \mathscr{M}_T \Rightarrow \mathscr{L}_{\bar{T}} V = \mathscr{L}_T$

【6'】 $\forall T, \bar{T} \in \mathscr{T};\ \mathscr{L}_{\bar{T}} = \mathscr{L}_T$

本書では証明を扱わないことにしているが、ここに限って、例外的に証明をやってみる。

【1】and【2】⇒【3】の証明:

まず、$\mathscr{V}$の元はFからFの上への写像だから、$\mathscr{V}$の元同士の積に関しては結合則が成り立つ。

さて【2】より $\forall T \in \mathscr{T};\ \exists V \in \mathscr{V};\ \mathscr{M}_T V = \mathscr{M}_T$ だと言える。$\mathscr{M}_T$は一対一写像だから、これは$\mathscr{V}$に単位元が存在することを意味する。

また、$\mathscr{T}$は空集合でないから、任意の$V \in \mathscr{V}$に対して、$\mathscr{M}_{\bar{T}} V = \mathscr{M}_T$ を満たす$T, \bar{T} \in \mathscr{T}$の存在することが、【1】から分かる。さらに、この$T, \bar{T} \in \mathscr{T}$に対して【2】より $\exists V' \in \mathscr{V};\ \mathscr{M}_T V' = \mathscr{M}_{\bar{T}}$ だと分かる。$\mathscr{M}_T$も$\mathscr{M}_{\bar{T}}$も一対一写像だから、$\mathscr{V}$の各元Vに逆写像V'が存在することになる。

さらに、任意の$V_1, V_2 \in \mathscr{V}$に対して、$\mathscr{M}_{T(3)} V_2 = \mathscr{M}_{T(2)}, \mathscr{M}_{T(2)} V_1 = \mathscr{M}_{T(1)}$を満たす$T(1), T(2), T(3) \in \mathscr{T}$の存在することが、【1】より分かる。したがって、$\mathscr{M}_{T(3)} V_2\ V_1 = \mathscr{M}_{T(1)}$だ。これと【2】から $V_2\ V_1$ は$\mathscr{V}$のただ一つの元に等し