

1-2-2 関数

定義

$A \subset \mathbb{R}$ とするとき、 $\mathbb{R}(A)$ の元を関数と呼ぶ。元々は、これが関数の定義だったはずだが、実際には、関数という語はもっと奔放に使用される。例えば、 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots \subset \mathbb{N}$ とし、 $A'_1 \subset \mathbb{R}(A_1)$ または $A'_1 \subset \mathbb{R}$ とし、 $A'_2 \subset \mathbb{R}(A_2)$ または $A'_2 \subset \mathbb{R}$ とし、 $A'_3 \subset \mathbb{R}(A_3)$ または $A'_3 \subset \mathbb{R}$ とし、 \dots $X \subset A'_1$ とか $X \subset A'_1 \times A'_2$ とか $X \subset A'_1 \times A'_2 \times A'_3$ とか \dots とし、 $Y \subset \mathbb{R}(A_0)$ または $Y \subset \mathbb{R}$ とするとき、

$X \mapsto Y$ の元を関数と呼ぶこともある。

特に、 $X \subset A'_1 \times A'_2$ とか $X \subset A'_1 \times A'_2 \times A'_3$ とか \dots とするときや、 A_1 の元の個数が 1 より大き(1 ではな)く、 $A'_1 \subset \mathbb{R}(A_1)$ かつ $X \subset A'_1$ とするときには、

$X \mapsto Y$ の元を多変数関数と呼ぶことがある。

また、 A_0 の元の個数が 1 より大き(1 ではな)く、 $Y \subset \mathbb{R}(A_0)$ とするときには、 $X \mapsto Y$ の元をベクトル値関数と呼ぶことがある。(§2-5-2 参照)

$A \subset \mathbb{Z}$ とするとき、 $\mathbb{R}(A)$ の元を数列と呼ぶことがある。 $A, B \subset \mathbb{Z}$ とするとき、 $\mathbb{R}(A \times B)$ の元を行列と呼ぶことがある。数列も行列も関数だ。行列は多変数関数だ。 $n \in \mathbb{N}$ とするとき、 $\{1, \dots, n\}$ から $\{1, \dots, n\}$ の上への一対一数列を「 n 次の置換」と呼ぶ。 n 次の全ての置換を元に持ち、それ以外の元を全く持たない集合を \mathbb{P}_n と書くことにする。

例えば、 $s \in \mathbb{R}(9)$ とするとき、

$$\begin{aligned} s(1) &= 5 \text{ and } s(2) = 2 \text{ and } s(3) = 8 \text{ and } s(4) = 7 \text{ and } s(5) = 9 \\ &\text{and } s(6) = 1 \text{ and } s(7) = 3 \text{ and } s(8) = 4 \text{ and } s(9) = 6 \end{aligned}$$

ならば、 $s \in \mathbb{P}_9$ でもあり、 s を $5, 2, 8, 7, 1, 9, 3, 4, 6$ とか

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right]$$