

## 1-2-3 方程式

空欄に数や関数を代入すると、完成文が命題を表すようになる、そのような文字式を方程式と呼ぶ。このことは、§1-1-2で既に述べた。方程式を、数や関数を命題に写す写像と考えても良い。例えば、 $3x + 1 = 0$ という方程式は、0を $3 \times 0 + 1 = 0$ という偽命題に写し、5を $3 \times 5 + 1 = 0$ という偽命題に写し、 $-1/3$ を $3 \times (-1/3) + 1 = 0$ という真命題に写すという具合だ。以後、本書では、たいてい、方程式を写像と見なして、話を進める。Sを集合とし、Eを方程式とするとき、Eの定義域がSならば、Eを「S上の方程式」と呼ぶことにする。Sを集合とし、EをS上の方程式とするとき、 $\{x \in S \mid E(x)\}$ の元を「Eの解」と呼ぶ。

本書でも、マッハの描像(§2-1-1)について述べるときには例外的に、方程式を写像ではなく文字式として扱う。そのための準備として、ここで少し、方程式を文字式と考える場合の説明をしておく。例えば、

$$x + 2y + 3z + 4w = 5 \text{ and } 5x + 4y + 3z + 2w = 1$$

この方程式の完成文が真命題となるような、空欄への代入の仕方を網羅するには、 $x, y$ を独立変数、 $z, w$ を従属変数に選んで、

$$w = 2 + 2x + y \quad z = -1 - 3x - 2y$$

に従うとか、 $y, w$ を独立変数、 $x, z$ を従属変数に選んで、

$$z = 2 - (1/2)y - (3/2)w \quad x = -1 - (1/2)y + (1/2)w$$

に従って代入すればよい。 $x, y, z, w$ のうちのどの二つを独立変数に選んでもよい。独立変数と従属変数の個数は選び方によって変化しない。連立一次方程式の場合、それが $n$ 個の変数についての $m$ 個の等式によって表されるならば、独立変数の個数は $n - m$ となる。従属変数の個数は $m$ だ。一次でない連立方程式についても、ほぼこうなる。ただし、 $m$ 個の等式の中に、他の等式から導き出せるものが入っていてはならぬ。例えば、4つの変数に対する3つの等式で表される方程式  $x + y = 2$  and  $x + y + z + w = 3$  and  $z + w = 1$  については、1, 2番目の等式から3番目の等式が導き出されるので、独立変数の個数は $4 - 3$ ではなく