

宇田雄一「古典物理学」

⑦ N を集合とし、 $F \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}(N)$ とし、 $G \in \mathbb{R}(N)$ とし、 $a \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\forall n \in N; \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R};$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |[F(x)](n) - G(n)| < \varepsilon$$

を $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = G$ と略記することがある。

⑧ $R \subset \mathbb{R}$ とし、 $F \in R \mapsto \mathbb{R}(4)$ とするとき、

$$\forall t \in R; \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in R; |x - t| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(t)| < \varepsilon$$

ならば、 F は連続だと言われる。

\sin, \cos, \tan を次式で定義し、これらを三角関数と呼ぶ。

$$\sin \in \mathbb{R}(\mathbb{R}) \text{ and } \forall \theta \in \mathbb{R}; \sin(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)!} \theta^{2i-1}$$

$$\cos \in \mathbb{R}(\mathbb{R}) \text{ and } \forall \theta \in \mathbb{R}; \cos(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-2)!} \theta^{2i-2}$$

$$\tan \in \mathbb{R}(\mathbb{R}) \text{ and } \forall \theta \in \mathbb{R}; \tan(\theta) = \sin(\theta) / \cos(\theta)$$

ただし、 $0!$ は1を表し、 $1!$ は1を表し、 $2!$ は 1×2 を表し、 $3!$ は $1 \times 2 \times 3$ を表し、 \dots とする。また、実数のゼロ乗は1だ。 $\theta^0 = 1$

\sinh, \cosh, \tanh を次式で定義し、これらを双曲線関数と呼ぶ。

$$\sinh \in \mathbb{R}(\mathbb{R}) \text{ and } \forall \theta \in \mathbb{R}; \sinh(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)!} \theta^{2i-1}$$

$$\cosh \in \mathbb{R}(\mathbb{R}) \text{ and } \forall \theta \in \mathbb{R}; \cosh(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-2)!} \theta^{2i-2}$$

$$\tanh \in \mathbb{R}(\mathbb{R}) \text{ and } \forall \theta \in \mathbb{R}; \tanh(\theta) = \sinh(\theta) / \cosh(\theta)$$

\sin の $\{\theta \in \mathbb{R} \mid -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$ への制限は、 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ の上への一対一写像に成っている。 \cos の $\{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ への制限は、 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ の上への一対一写像に成っている。 \sinh は、 \mathbb{R} から \mathbb{R} の上への一対一写像に成っている。 \cosh の $\{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ への制限は、 $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\}$ の上への一対一写像に成っている。