1－5　群論と抽象数学

Ｓを集合とし、ＦをＳ(Ｓ×Ｓ)の元とするとき、以下の条件が全て成り立つならば、「ＳはＦの下で**群**をなす」と言う。

［条件１］　$\forall s,t,u \in S ; F(F(s,t),u) = F(s, F(t,u))$

［条件２］　$\exists s \in S ; [\forall t \in S ;\ F(s,t) = F(t,s) = t]$ and

$[\forall t \in S ; t \neq s \Rightarrow [\exists u \in S ; F(t,u) \neq u \text{ or } F(u,t) \neq u]]$

［条件３］　$\forall s \in S ; \exists t \in S ; \forall u \in S ; F(F(s,t),u) = F(u, F(s,t)) = u$

これらの条件を**群の公理**と呼ぶ。Ｆが何か了解済みの時には、$F(s,t)$を単に st と書くことが多い。条件２のsを「Ｓの**単位元**」と呼ぶ。条件２の後半は、Ｓの単位元が一つしか存在しないことを表す。条件３は

$\forall s \in S ;\ \exists t \in S ;\ F(s,t)$がＳの単位元になる

ことを表す。条件３のtを「sの**逆元**」と言う。sの逆元をs^{-1}と書くことがある。tがsの逆元ならば、$F(t,s)$も単位元になる。

Ｓとしては、数や関数の集合を具体的に色々と考えることが前提になっている。群という抽象的な集合があるのではない。群という語は、群の公理を満たす具体的な集合の総称だ。以下に、群の具体例を挙げる。

①$\mathbb{Z}$は加法の下で群を成す。

$F \in \mathbb{Z}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$とするとき、$\forall s,t \in \mathbb{Z} ; F(s,t) = s + t$ならば、

$\mathbb{Z}$はＦの下で群を成す。単位元は０、$\forall s \in \mathbb{Z} ; s$の逆元は$-s$

②$\{0\}$は加法の下で群を成す。

$F \in (\{0\} \times \{0\}) \mapsto \{0\}$とするとき、$F(0,0) = 0 + 0$ならば、

$\{0\}$はＦの下で群を成す。単位元は０、０の逆元は０

宇田雄一