

宇田雄一「古典物理学」

群に限らず、数学で用いられる抽象的な概念は全て、具体的な概念の総称になっている。数学に於いて具体的な概念とは、突き詰めれば自然数だ。例えば、実数はすべて $\mathbb{N}(\mathbb{N})$ の元に対応付けられる。 $100\pi = 314.1592\cdots$ を例にとって説明しよう。 $x \in \mathbb{N}(\mathbb{N})$ とするとき、 x が 100π に対応するならば、符号を見て $x(1) = 2$ 、1の位の数字を見て $x(2) = 4+1$ 、0.1の位の数字を見て $x(3) = 1+1$ 、10の位の数字を見て $x(4) = 1+1$ 、0.01の位の数字を見て $x(5) = 5+1$ 、100の位の数字を見て $x(6) = 3+1$ 、0.001の位の数字を見て $x(7) = 9+1$ 、1000の位の数字を見て $x(8) = 0+1$ 、0.0001の位の数字を見て $x(9) = 2+1$ 、 \cdots と決めればよい。 x が -100π に対応するならば、符号を見て $x(1) = 1$ と決める。一般的に言うと、

F を $\{x \in 10(\mathbb{N}) \mid x(1) \leq 2 \text{ and not } \forall n \in \mathbb{N}; x(n) = 1\}$ から \mathbb{R} への写像とするとき、

$$\forall x \in \{x \in 10(\mathbb{N}) \mid x(1) \leq 2 \text{ and not } \forall n \in \mathbb{N}; x(n) = 1\};$$

$$F(x) = (-1)^{x^{(1)}} [[x(2)-1] + 0.1[x(3)-1] + 10[x(4)-1] + 0.01[x(5)-1] \\ + 100[x(6)-1] + 0.001[x(7)-1] + \cdots]$$

ならば、 F は一対一対応になっている。一対一にこだわらなければ、

F を $\mathbb{N}(\mathbb{N})$ から \mathbb{R} への写像とするとき、

$$\forall x \in \mathbb{N}(\mathbb{N});$$

$$F(x) = (-1)^{x^{(1)}} [[x(2)-1] + 0.1[x(3)-1] + 10[x(4)-1] + 0.01[x(5)-1] \\ + 100[x(6)-1] + 0.001[x(7)-1] + \cdots]$$

ならば、 F は $\mathbb{N}(\mathbb{N})$ から \mathbb{R} の上への写像になっている。

関数は $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ の元だから、 $\mathbb{N}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}(\mathbb{N})$ の元で代用できるし、微分は $\mathbb{R}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{R})$ の元だから、 $[\mathbb{N}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}(\mathbb{N})] \rightarrow [\mathbb{N}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}(\mathbb{N})]$ の元で代用できる。同様にして、如何に複雑な数学上の具体的な概念も \mathbb{N} から組み立てることが出来るだろう。逆に、 \mathbb{N} から組み立てることの出来ない概念は、数学的には荒唐無稽だという批判を受けねばならぬ。本書では出来るだけ基礎に立ち返った(具体的な)書き方を心がけたが、それでも \mathbb{R} を \mathbb{N} に還元するのはやめておいた。あまりにも読みにくくなるからだ。