

宇田雄一「古典物理学」

さて、数学の公理は、 \mathbb{N} から組み立てられるあらゆる具体概念の内から、都合の良いものだけを選び出す方程式だ。公理によって抽象的な概念が定義される。群の公理の解を群、環の公理の解を環、体の公理の解を体、線形空間の公理の解を線形空間と呼ぶ、という具合にだ。具体的と言えるのは、 \mathbb{N} から組み立てられる概念のみであって、日常においては十分に具体的だと思われている実数ですら、実数の公理によって定義される抽象的な概念と見るべきだ。

S を集合とし、 $F, G \in S(S \times S)$ とし、 H を $S \times S$ 上の方程式とするとき、
[公理1] S が (F, G) の下で体を成す。

[公理2] S が H の下で全順序集合を成す。

[公理3] $\forall A, B \subset S; [1] \Rightarrow [2] \text{ and not } [3] \text{ or not } [2] \text{ and } [3]$

【1】 $(\exists a; a \in A) \text{ and } (\exists b; b \in B) \text{ and } (\text{not } \exists c; c \in A \text{ and } c \in B)$
and $\forall a \in A; \forall b \in B; H(a, b)$

【2】 $\exists a \in A; \forall b \in A; H(b, a)$

【3】 $\exists a \in B; \forall b \in B; H(a, b)$

[公理4] $\forall a, b, c, d \in S; [4] \text{ and } [5] \text{ and } [6] \text{ and } [7] \Rightarrow [8]$

【4】 $H(b, a) \text{ and } H(d, c) \Rightarrow H(F(b, d), F(a, c))$

【5】 $H(b, a) \Rightarrow H(F \text{に関する } a \text{ の逆元}, F \text{に関する } b \text{ の逆元})$

【6】 $H((F, G) \text{に関する } S \text{ のゼロ元}, a) \text{ and}$

$\text{not } (F, G) \text{に関する } S \text{ のゼロ元} = a$

【7】 $H((F, G) \text{に関する } S \text{ のゼロ元}, b) \text{ and}$

$\text{not } (F, G) \text{に関する } S \text{ のゼロ元} = b$

【8】 $H((F, G) \text{に関する } S \text{ のゼロ元}, G(a, b)) \text{ and}$

$\text{not } (F, G) \text{に関する } S \text{ のゼロ元} = G(a, b)$

[公理5] $\forall N \subset S; [9] \Rightarrow [10]$

【9】 $\exists M \in N(N); [9a] \text{ and } [9b]$

【9a】 M は一対一対応だ

【9b】 $\forall a, b \in N; M(a + b) = F(M(a), M(b))$

and $M(a \times b) = G(M(a), M(b))$

【10】 $\text{not } \exists a \in S; \forall b \in N; H(b, a)$